

Dualität und Martinrand

von

Friedrich Schneider

aus

Karl-Marx-Stadt

1969 № 249

Dualität und Martinrand

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Friedrich Schneider
aus
Karl-Marx-Stadt

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 4.6.1969

Dekan : Professor Dr.H.Wegener
Erstberichterstatter: Professor Dr.H.Bauer
Zweitberichterstatter: Professor Dr.K.Jacobs

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung	S.1
I. Vorbereitungen	S.4
II. Verbandsstruktur in H und zwei Topologien auf H	
1 Randverhalten $\mathcal{T}_c$ -stetiger Linearformen	S.10
2 Ordnungsdual H^b und spezifische Topologie $\mathcal{T}_s$	S.15
III. Duale Paarungen	
1 Duale Ausgangsstrukturen	S.22
2 Zwei Dichteaussagen in bezug auf die Kerne $K, \tilde{K}$	S.23
3 Maximale Paarungen	S.25
IV. Anmerkungen	S.30

Einführung

Eine topologische Kennzeichnung von stetigen Linearformen auf Vektorräumen analytischer Funktionen einer komplexen Variablen durch analytische Funktionen gibt Köthe [3] an.

Tillmann [6] hat für die klassischen harmonischen Funktionen im $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ eine entsprechende Charakterisierung bewiesen - von ihm verwendete Hilfsmittel sind sehr eng mit der speziellen Struktur der Lösungen der Laplace-Gleichung verbunden.

Die Ergebnisse von Sieveking [5] gestatten eine entsprechende Betrachtung auch im nicht-elliptischen Fall,

genauer:

Sei H der von den nicht-negativen Lösungen der Laplace-Gleichung auf dem offenen Einheitskreis $\subset \mathbb{R}^2$ bzw. der Wärmeleitungsgleichung auf der oberen Halbebene erzeugte Vektorverband, $\mathcal{T}_c$ bezeichne die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz auf H . Sei S^* der euklidische Rand des Einheitskreises bzw. der oberen Halbebene.

Jeder Linearform $\nu \in (H, \mathcal{T}_c)'$ wird vermöge einer Abbildung γ eineindeutig eine beschränkte, stetige Funktion $\hat{\nu}$ auf S^* zugeordnet. $\hat{\nu}$ kann nach [2] zu einer harmonischen Funktion $H\hat{\nu} \in H$ fortgesetzt werden - $H\hat{\nu}$ schließt auf S^* stetig an $\hat{\nu}$ an.

Sei $H^1 = \{H\hat{\nu} \mid \nu \in (H, \mathcal{T}_c)'\} \subset H$; $\mathcal{T}_0$ bezeichne die Ordnungstopologie auf H , $\mathcal{T}_k$ die Ordnungstopologie in bezug auf die kanonische Ordnung im Ordnungsdual H^b von H . Es existiert eine Homöomorphie t (III, 1.1, 1.2):

$$(1) \quad \{(H, \mathcal{T}_c)', \mathcal{T}_k\} \xrightarrow{t} \{H^1, \mathcal{T}_0\}$$

- (2) H und H^1 sind duale Vektorräume, die definierende Bilinearform lautet:

$$\langle h, h^1 \rangle = t^{-1}(h^1)\{h\} \quad \left| \quad h \in H, \quad h^1 \in H^1 \right.$$

Die Vermittlung zwischen Linearformen und zugeordneten harmonischen Funktionen geschieht 'über den Martinrand S^* ' - in den durch die punktweise Ordnung geordneten Vektorräumen $C_0(S^*)$ bzw. $C_b(S^*)$ stimmt die Ordnungstopologie $\mathcal{T}_p$ mit der Topologie $\mathcal{T}_g$ der gleichmäßigen Konvergenz überein.

Ziel der Arbeit ist es, die Topologien $\mathcal{T}_k$ und $\mathcal{T}_0$ in diesem Sinne zu interpretieren - der Weg ist durch die oben skizzierte Konstruktion von t vorgezeichnet.

Gesucht sind Räume $L_b(L_0)$ von Linearformen auf H , so, daß ι , auf $L_b(L_0)$ fortgesetzt, $L_b(L_0)$ eineindeutig auf $C_b(S^*)$ ($C_0(S^*)$) abbildet.

Alle Funktionen $\in C_b(S^*)$ sind im Sinne von [2] resolutiv - eine Motivation für die Bezeichnung: 'maximale Paarung.'

In den Vorbereitungen werden Bezeichnungen eingeführt und die Hilfsmittel aus der Theorie der harmonischen Funktionen im Sinne von [1] und aus der Theorie der topologischen Vektorräume nach [4] genannt, die zum inhaltlichen Verständnis der Arbeit nötig sind. Die für die Konstruktionen im Abschnitt III notwendigen verbandstheoretischen und topologischen Aussagen enthält Kapitel II. Die Einführung der spezifischen Topologie $\mathcal{T}_s$ (II, 2.10), feiner als $\mathcal{T}_c$, ist bei der angegebenen Zielsetzung nötig, da nicht alle Funktionen aus $\mathcal{C}_0(S^*)$ ι -Bilder von Linearformen aus $(H, \mathcal{T}_c)$ sind (II, 1.9).

Den Übergang zu den maximalen Paarungen gestatten der 2.Dichthesatz (III,2.6) und die in III,3.1 bewiesene Beschränktheit der zu ' $\tilde{K}$ ' gehörigen Martinmaße '.

III,3 wird mit den beiden Hauptsätzen der Arbeit - den Homöomorphiesatz (3.11) und der Dualitätsaussage (3.12)-abgeschlossen. Weiterführende Gedanken finden sich in Abschnitt IV - auf eine Einführung der hier neu auftretenden Begriffe ist verzichtet worden.

Die verwendeten Hilfsmittel zeigen, daß sich die erzielten Ergebnisse sofort auf weitere Beispiele im Rahmen der Bauer-Axiomatik ([1]) übertragen lassen, insbesondere auf die Standardbeispiele auf entsprechend höher-dimensionalen Definitionsbereichen im R^m , $m > 2$.

Die Klarstellung der Gedankenführung bedingte aber eine Darstellung streng im Rahmen der angegebenen Beispiele in der Ebene.

Ich danke den Herren Professoren Cornea und Constantinescu sowie den Herren Föllmer, Sieveking und besonders Herrn Köhn vom Mathematischen Institut in Erlangen. - Die Gespräche mit ihnen haben entscheidend den Fortgang der Arbeit und die Entwicklung des Ansatzes 'am Martinrand' beeinflußt.

Herrn Prof. Bauer danke ich für seine langjährige Förderung - seine Geduld gegenüber meinen unsteten mathematischen Vorstellungen hat die Fertigstellung dieser Arbeit allererst ermöglicht.

I. Vorbereitungen

Eine gemeinsame Behandlung der beiden Standardbeispiele in der Ebene für die Bauer-Axiomatik (siehe [1]) setzt eine übersichtliche Notation voraus - eine solche werde zunächst eingeführt.

Erzeugende Kegel für die behandelten Vektorräume harmonischer Funktionen sind die

- (1) nicht-negativen Lösungen der Laplace-Gleichung auf dem offenen Einheitskreis
- (2) nicht-negativen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf der oberen Halbebene

Vereinbarung

Zahlenindices rechts neben dem eingeführten Symbol beziehen sich im allgemeinen auf die Beispiele (1) und (2): eine klassische harmonische Funktion heiÙe h_1 , h_2 bezeichne dagegen eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Fehlen die Indices, so handelt es sich um beide Beispiele umfassende Begriffe - eine in diesem Sinne 'allgemeine' harmonische Funktion werde mit h bezeichnet.

Zahlenindices beziehen sich dann nicht auf die Grundbeispiele, wenn der umfassende Begriff aus dem Kontext unmiÙverstündlich hervorgeht. Eine nicht-negative harmonische Funktion h sei Summe zweier solcher Funktionen - geschrieben wird: $h = h_1 + h_2$.

Restriktionen eingeführter Topologien und Abbildungen werden nicht neu bezeichnet.

1. Der Grundraum S

Seien $x = (\xi, t)$, $y = (\eta, \tau)$ Punkte des R^2 :

$$\begin{array}{ll} \underline{S}_{1-} = \{x \mid \|x\| < 1\} & \underline{S}_{2-} = \{x \mid t > 0\} \\ \underline{S}_{1-}^* = \{y \mid \|y\| = 1\} & \underline{S}_{2-}^* = \{y \mid \tau = 0\} \end{array}$$

$\underline{S}, \underline{S}^*$ seien als topologische Räume verstanden in bezug auf die von der euklidischen Topologie im R^2 induzierten Topologie.

2. Harmonische Funktionen auf S

$\mathcal{H}$ bezeichne den Vektorraum aller, $\mathcal{H}_+$ den Kegel der nicht-negativen harmonischen Funktionen auf S, $\underline{H} = \mathcal{H}_+ - \mathcal{H}_+$.

$\mathcal{T}_c$ sei die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{H}$ bzw. H, $(\underline{H}, \mathcal{T}_c)'$ bezeichne den Vektorraum der $\mathcal{T}_c$ -stetigen Linearformen auf H, $\forall$ ein Element von $(\underline{H}, \mathcal{T}_c)'$.

H ist regulär geordneter Vektorverband in bezug auf die (spezifische) Ordnung $\leq$: $h_1 \leq h_2 \iff \exists h \in \mathcal{H}_+ : h_1 + h = h_2$

$h_+, h_-, |h|$ bezeichnen den Positiv-, Negativteil und den (spezifischen) Betrag einer Funktion h im Vektorverband H - im Unterschied zu

$$\underline{h}_+(x) = \sup\{h(x), 0\}, \quad \underline{h}_-(x) = \sup\{-h(x), 0\}, \quad \underline{|h|} = h_+ + h_-$$

Für $h, h_1, h_2 \in H$ gelten:

$$\underline{\{h\}} \geq \underline{|h|}, \quad \underline{\{h_1 - h_2\}} \geq \underline{|\{h_1\} - \{h_2\}|}$$

$\mathcal{T}_0$ bezeichne die Ordnungstopologie auf H, $(\underline{H}, \mathcal{T}_0)'$ den Vektorraum der $\mathcal{T}_0$ -stetigen Linearformen auf H.

3. Die reguläre Menge V

$$\begin{array}{l|l} \underline{V}_{1-} = \{x \mid \|x\| < \frac{1}{2}\} & \underline{V}_{2-} = \{x \mid \|(\xi, t) - (0,1)\| < \frac{1}{2}\} \\ \underline{V}_{1-}^* = \{x \mid \|x\| = \frac{1}{2}\} & \underline{V}_{2-}^* = \{x \mid \|(\xi, t) - (0,1)\| = \frac{1}{2}\} \end{array}$$

x₀ bezeichne den Mittelpunkt von V, also:

$$\underline{x}_{0,1} = (0,0) \quad | \quad \underline{x}_{0,2} = (0,1)$$

4. Radonmaße auf S, S*, V*

Mit M(S), M(S'), M(V*) seien die Vektorräume der reellen Radonmaße in bezug auf die betreffenden Räume bezeichnet. M_k(S), M_k(S₂^{*}), M_b(S₂^{*}) seien die Teilräume der Radonmaße mit kompaktem Träger bzw. der beschränkten Radonmaße, M_(.)⁺ bezeichne den jeweiligen Kegel positiver Radonmaße.

Auf M(S*) sei T_{V-} die vage Topologie.

5. Stetige Funktionen auf S*

ℓ₀(S*) bzw. ℓ_b(S*) seien die in bezug auf die punktweise Ordnung -P- geordneten Vektorräume der stetigen, im ∞ verschwindenden bzw. der stetigen, beschränkten Funktionen auf S*.

Auf ℓ₀(S*) bzw. ℓ_b(S*) bezeichne T_g die Topologie der gleich-

mäßigen Konvergenz, $\mathcal{T}_p$ die Ordnungstopologie.

Vereinbarung: $\mathcal{L}_b(S_1^*) = \mathcal{L}_0(S_1^*) = \mathcal{L}(S_1^*)$ (S_1^* kompakt)

6. Die Cauchy-Dirichlet-Abbildung c auf $\mathcal{L}_b(S^*)$

Nach [2] gilt: Zu jedem $f \in \mathcal{L}_b(S^*)$ existiert genau eine auf S harmonische, auf $\bar{S} = S \cup S^*$ stetige Funktion H_f , die auf S^* mit f übereinstimmt, die potentialbeschränkt ist.

Bezeichne c diese eineindeutige, lineare Abbildung: $c(f) = H_f$.
Wegen $f \underset{(p)}{>} 0$ auf $S^* \iff H_f \underset{(p)}{>} 0$ auf S sind c und c^{-1} positive
Abbildungen.

7. Die Kerne $K, \tilde{K}$

Poissonkern

$$\underline{K_1(x,y)} = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^2}$$

$$x \in S_1, y \in S_1^*$$

$$\underline{\tilde{K}_1(x,y)} = K_1(x,y)$$

parab.Kern

$$\underline{K_2(x,y)} = \frac{1}{2\sqrt{4t}} e^{-\frac{|\xi - \eta|^2}{4t}}$$

$$x = (\xi, t) \in S_2, y = (\eta, 0) \in S_2^*$$

$$\underline{\tilde{K}_2(x,y)} = \frac{K_2(x,y)}{K_2(x_2,y)}, x_2 = (0, 2)$$

8. Integraldarstellung nach Martin

Nach [5] existiert zu jedem $h \in H$ in bezug auf die Kerne K ($\tilde{K}$) genau ein von S^* getragenes Radonmaß μ_h ($\tilde{\mu}_h$) mit:

$$h = \int_{S^*} K(., y) \mu_h(dy) \text{ bzw. } h = \int_{S^*} \tilde{K}(., y) \tilde{\mu}_h(dy)$$

Abkürzung: $\mu_i = \mu_{h_i}$, $\tilde{\mu}_i = \tilde{\mu}_{h_i}$ $i = 1, 2$

$m(\tilde{m})$ sei die 1-1 deutige Abbildung von H in $M(S^*)$:

$$m(h) = \mu_h \quad \text{bzw.} \quad \tilde{m}(h) = \tilde{\mu}_h$$

Das Bild von H bei der Abbildung $m(\tilde{m})$ in $M(S^*)$ sei mit $\hat{M}(S^*)$ $\{\tilde{M}(S^*)\}$ bezeichnet - die zugehörigen positiven Kegel heißen $\hat{M}_+(S^*)$ $\{\tilde{M}_+(S^*)\}$.

Vereinbarung: Statt $\int_{S^*} K(., y) \mu(dy)$ wird $\int K(., y) \mu(dy)$

geschrieben.

9. Der Ordnungsdual H^b

H^b (Elemente heißen l) ist in bezug auf die kanonische Ordnung k ein Vektorverband, k ist definiert durch den Kegel H_+^b :

$$H_+^b = \{l \in H^b \mid l(h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{K}_+\}$$

$\tilde{\mathcal{I}}_k$ sei die zugehörige Ordnungstopologie auf H^b .

H^+ sei der von den positiven Linearformen auf H erzeugte Vektorraum. Man beachte, daß gilt: $H^b = H^+ = (H, \tilde{\mathcal{I}}_0)'$. (Siehe etwa [4])

Folgende Untervektorräume von H^b werden betrachtet:

$${}^1H' = \text{Res}_{H^M_k}(S), \quad {}^2H' = \text{Res}_H M(V')$$

$\underline{L}$ sei der von ${}^2H'$ in H^b erzeugte Untervektorverband.

10. Die Abbildungen $\hat{\iota}(\tilde{\iota})$ auf H^b

Jedem $l \in H^b$ wird eine reellwertige Funktion $\hat{l}(\tilde{l})$ auf S^k zugeordnet:

$$\hat{\iota}(l) = \hat{l} \quad \text{mit} \quad \hat{l}(y) = l\{K(.,y)\} \forall y \in S^k$$

$$\tilde{\iota}(l) = \tilde{l} \quad \text{mit} \quad \tilde{l}(y) = l\{\tilde{K}(.,y)\} \forall y \in S^k$$

Nach Definition sind $\hat{\iota}, \tilde{\iota}$ positiv und linear.

Es treten weiter auf:

$$\underline{w}^1 = \hat{\iota}({}^1H') \quad \underline{\tilde{L}} = \tilde{\iota}(L)$$

$$\underline{w}^2 = \hat{\iota}({}^2H') \quad \underline{\tilde{w}}^2 = \tilde{\iota}({}^2H')$$

II. Verbandsstruktur in H und zwei Topologien auf H

1 Randverhalten $\mathcal{T}_c$ -stetiger Linearformen

Untersucht werden Eigenschaften der Funktionen aus W^1 (siehe I, 10).
Zum Zusammenhang $\mathcal{T}_c$ -stetiger Linearformen auf H mit den Radon-
maßen auf S :

(1.1) Lemma: ${}^1H' = (H, \mathcal{T}_c)'$

Beweis: Zu jedem $\nu \in (H, \mathcal{T}_c)'$ existiert eine kompakte Menge $K \subset S$
und ein $\delta > 0$ mit:

$$|h| \leq \delta \text{ auf } K \Rightarrow |\nu(h)| \leq 1, \text{ also:}$$

$$|\nu(h)| \leq \frac{1}{\delta} \sup_K |h| \quad \forall h \in H$$

Nach Hahn-Banach existiert nun ein Radonmaß $\bar{\nu}$ mit Träger in K .

$$\bar{\nu}(h) = \nu(h) \quad \forall h \in H$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Definition von $\mathcal{T}_c$ (I, 2)

Wie stark abweichend voneinander Radonmaße sein können, die einer
festen Linearform $\nu \in (H, \mathcal{T}_c)'$ nach (1.1) zugeordnet werden können,
erhellet:

(1.2) Bemerkung

Es gibt orthogonale Radonmaße $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$ auf S mit

$$\bar{\nu}_1(h) = \bar{\nu}_2(h) \quad \forall h \in H$$

Beispiel: Sei $\varepsilon_{x_0}^V$ die auf $\mathcal{U}$ gefegte Einheitsmaße in x_0 im Sinne von ([1], 3.4.1). Es gilt $\varepsilon_{x_0} \perp \varepsilon_{x_0}^V$ und nach ([1], 3.4.2):

$$\varepsilon_{x_0}(h) = \varepsilon_{x_0}^V(h) \quad \forall h \in H$$

Wähle $\bar{\nu}_1 = \varepsilon_{x_0}$, $\bar{\nu}_2 = \varepsilon_{x_0}^V$.

(1.3) Vereinbarung: Der Vektorraum ${}^2H'$ wird im weiteren als Teilraum von $(H, \mathcal{T}_C)'$ aufgefaßt.

Eine erste Strukturaussage:

(1.4) Satz

(1.5) $\hat{\nu}$ ist eine 1-1 deutige, lineare, positive Abbildung von ${}^1H'$ in $\mathcal{C}_0(S^*)$

(1.6) W^1 ist ein punktgetrennender, eine strikt positive Funktion enthaltender Untervektorraum von $\mathcal{C}_0(S^*)$.

Beweis von (1.5):

1. $\hat{\nu} \in \mathcal{C}_0(S^*)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ für eine Punktfolge $(y_n)_{n=1,2,\dots} \subset S$

impliziert: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\nu}_n)K(., y_n) = K(., y)$ - also ist $\hat{\nu}$ stetig

auf S^* für alle $\nu \in {}^1H'$. Da S_1 kompakt, bleibt nur noch zu

zeigen: $\hat{\nu} \in \mathcal{C}_0(S_2^*) \quad \forall \nu \in {}^1H_2'$. Sei o.B.d.A. $\nu \in M_K^+(S_2)$, T_ν

bezeichne den Träger, $\|\nu\|$ die Gesamtmasse von ν , dann gilt:

$$|\nu K_2(., y)| \leq \|\nu\| \max_{x \in T_\nu} K_2(x, y) \quad \forall y \in S_2^*$$

Seien t_1, t_0, ξ_1, ξ_0 wie folgt definiert:

$$t_1 = \max \{t | (\xi, t) \in T_\nu\}, \quad t_0 = \min \{t | (\xi, t) \in T_\nu\}$$

$$\xi_1 = \max \{\xi | (\xi, t) \in T_\nu\}, \quad \xi_0 = \min \{\xi | (\xi, t) \in T_\nu\}$$

Da T kompakt, gilt: $t_1 \geq t_0 > 0$ und:

$$|\nu K_2(., (\eta, 0))| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}t_0} f_0(\eta) \text{ mit}$$

$$f_0(\eta) = \begin{cases} \frac{|\xi_1 - \eta|^2}{4t_1} & \eta > \xi_1 \\ 1 & \xi_0 \leq \eta \leq \xi_1 \\ \frac{|\xi_0 - \eta|^2}{4t_1} & \eta < \xi_0 \end{cases}$$

Da $f_0 \in C_0(S_2^*)$, $f_0 \geq 0$ ist Teilbehauptung (1) bewiesen.

2. ζ ist 1-1 deutlich: Seien ν_1, ν_2 verschiedene Elemente aus ${}^1H'$ und es gelte $\hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2$ auf S^* . Nach Fubini und (1.1) folgt:

$$(1.7) \nu_1(h) = \int \hat{\nu}_1(y) \mu_h(dy) = \int \hat{\nu}_2(y) \mu_h(dy) = \nu_2(h) \quad \forall h \in H$$

Da nach Definition (I,10) ζ positiv und linear, ist (1.5) gezeigt.

Beweis von (1.6)

1. Punktetrennung: Die verschiedenen Punkten $y_1, y_2 \in S^*$ zugeordneten extremalen harmonischen Funktionen $K(., y_1), K(., y_2)$ auf S sind verschieden - also existiert ein $\bar{x} \in S$: $K(\bar{x}, y_1) \neq K(\bar{x}, y_2)$, wähle $\nu = \varepsilon_{\bar{x}}$ und beachte, daß $\varepsilon_{\bar{x}}(y) = K(\bar{x}, y)$ (siehe I,10).

2. Angabe von strikt positiven Funktionen: Wähle $v = \epsilon_{x_0}$, dann:

$$(1.8) \quad \hat{v}_1(y) \equiv 1 \quad \forall y \in S_1^*, \quad \hat{v}_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} \quad \forall y = (\eta, 0) \in S_2^*$$

Die Aussage (1.5) kann verschärft werden:

(1.9) Zusatz: Jede Funktion aus W^1 ist differenzierbar auf S^*

Beweis: Man stelle die Funktion $f_x = K(x, \cdot)$ auf S^* als Potenzreihe 'in y ' dar und wende die elementaren Konvergenzsätze der Integrationstheorie an.

Die Konstruktionen im Abschnitt III ermöglichen die Resultate

(1.10) und (1.13):

(1.10) Korollar W^2 ist ein punktstrennender, eine strikt-positive Funktion enthaltender Untervektorraum von $\mathcal{Q}_0(S^*)$, ι ist auf ${}^2H'$ eineindeutig.

Beweis: Da $W^2 \subset W^1$ (wegen ${}^2H' \subset {}^1H'$), bleibt nur die Eigenschaft 'punktstrennend' zu beweisen. Es gilt sogar:

$$(1.11) \quad \text{Zu } y_1, y_2 \in S^*, y_1 \neq y_2 \text{ existiert } \bar{x} \in V^*: \hat{\epsilon}_{\bar{x}}(y_1) \neq \hat{\epsilon}_{\bar{x}}(y_2).$$

Angenommen, es gälte $h' = K(\cdot, y_1) - K(\cdot, y_2) = 0$ auf V^* . Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Nullstellenmenge von h' auf einer Geraden liegt, V^* kann höchstens zweimal geschnitten werden, Widerspruch.

(1.12) Eine Norm auf W_2^2 : Sei $f_1 \in \mathcal{Q}_0(S_2^*)$ wie folgt definiert:

$$f_1(\eta) = \begin{cases} e^{-\frac{|1-\eta|^2}{4}} & \eta > 1 \\ 1 & -1 \leq \eta \leq +1 \\ e^{-\frac{|-1-\eta|^2}{4}} & \eta < -1 \end{cases}$$

Dann ist $\|\tilde{v}\|_1 = \inf \{ c \mid |\tilde{v}| \leq c f_1 \text{ auf } S_2^* \}$ eine Norm auf W_2^2 .

Man beachte die Konstruktion von f_0 im 1. Teil des Beweises von 1.5

(1.13) Korollar: $\tilde{W}^2$ ist ein punkt-trennender, eine strikt positive Funktion enthaltender Untervektorraum von $\mathcal{C}_0(S^*)$ -
 $\tilde{\tau}$ ist auf ${}^2H'$ 1-1 deutig.

Beweis: Nach dem Vorhergehenden ^{und} aufgrund der Definition von $\tilde{K}_2$ (I,6) bleibt nur zu zeigen, daß die Funktionen aus $\tilde{W}_2^2$ im ∞ verschwinden:

Einfache Rechnung ergibt für $x \in S_2$, $y \in S_2^*$:

$$(1.14) \quad \tilde{K}_2(x,y) = \alpha(t) e^{-\frac{2|\xi - \eta|^2 + \eta^2 t}{8t}}, \quad \alpha(t) \text{ reell und } > 0$$

Also gilt für jedes $x' = (\xi', t')$ mit $0 < t' < 2$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{K}_2(x', y) = 0$$

Satz von Lebesgue und (1.12) ergeben für alle $v \in {}^2H_1$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{S_2} v(dx) \tilde{K}_2(., y) = \int_{S_2} v(dx) \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{K}_2(., y) = 0$$

also $\tilde{v} \in \mathcal{C}_0(S_2^*)$.

(1.15) Bemerkung: Die Abbildung $\tilde{\iota}$ kann im klassischen Fall durch die Martinabbildung m gekennzeichnet werden:

m_1^{-1} , definiert durch $m_1^{-1}(v_1) = v_1 \circ (m_1^{-1})$ ist eine Abbildung von $(H_1, \mathcal{I})'$ auf $(M(S_1^*), \mathcal{I}_v)'$, nach Fubini gilt weiter:

$$v_1 \circ (m_1^{-1}) \{ \mu_1 \} = v_1 \left\{ \int K_1(., y) \mu_1(dy) \right\} = \int \hat{v}_1(y) \mu_1(dy) \quad \forall \mu_1 \in \hat{M}(S_1^*)$$

Da wegen $\hat{M}(S_1^*) = M(S_1^*)$ gilt: $(M(S_1^*), \mathcal{T}_V)' \cong \mathcal{U}(S_1^*)$ folgt:

$\zeta(\nu_1) = \nu_1 \circ (m_1^{-1}) \circ j$, wobei j die kanonische Injektion von S_1^* in $M(S_1^*)$, also $j(x) = \varepsilon_x$.

Sofort aus der Konstruktion folgt, daß m_1' eine Homöomorphie der Räume $(H_1, \mathcal{T}_c)'$ und $(M(S_1^*), \mathcal{T}_V)'$ in bezug auf die entsprechenden schwachen Topologien ist.

2 Ordnungsdual H^b und spezifische Topologie $\mathcal{T}_S$

Einleitend eine Angabe über

(2.1) Supremum zweier ordnungsbeschränkter Linearformen

Nach ([4], th.1.5, p.212) gilt für zwei ordnungsbeschränkte Linearformen l_1, l_2 auf einem Vektorverband E für jedes $x \in E$:

$$(2.2) \quad \sup(l_1, l_2)(|x|) = \sup\{l_1(y) + l_2(z) \mid y \geq 0, z \geq 0, y+z = |x|\}$$

Anwendung: Seien $l_1, l_2 \in H^b$ und $l = \sup(l_1, l_2)$, dann gilt speziell für alle $y \in S^*$ (da $K(., y) \in \mathcal{K}_+$ extremal ist)

$$\begin{aligned} \zeta(l)\{y\} &= l(K(., y)) = \sup_{0 < \lambda < 1} \{\lambda l_1(K(., y)) + (1-\lambda) l_2(K(., y))\} \\ &= \sup_{1,2} \{l_1(K(., y)), l_2(K(., y))\}, \text{ also:} \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \hat{l}(y) = \sup_{1,2} (\hat{l}_1(y), \hat{l}_2(y)) \quad \forall y \in S^*$$

Entsprechend gilt für $\tilde{\zeta}$:

$$(2.4) \quad \tilde{l}(y) = \sup_{1,2} (\tilde{l}_1(y), \tilde{l}_2(y)) \quad \forall y \in S^*$$

Jetzt kann die verbandstheoretische Konsequenz aus (1.9) gezogen werden:

(2.5) Satz: $(H, \mathcal{T}_c)'$ kann kein Unterverband von H^b sein.

Beweis: Seien x_1, x_2 verschiedene Punkte aus S . Läge das in H^b gebildete $\sup(\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}) = 1$ in ${}^1H'$, dann wäre nach (2.3):

$$(2.6) \hat{1}(y) = \sup_{1,2} (K(x_1, y), K(x_2, y)) \quad \forall y \in S^*$$

Widerspruch zu (1.10), da $\hat{1}(y)$ ersichtlich auf S^* nicht differenzierbar ist.

Konstruktion einer metrisierbaren und vollständigen Top. $\mathcal{T}_s$ auf H .

Vorangestellt werden zwei Hilfssätze über harmonische Funktionen:

(2.7) Lemma: Sei $(h_n)_{n=1,2,\dots}$ eine Folge nicht-negativer harmonischer Funktionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x_m) < +\infty \quad \forall x_m \in D$, D abzählbar, dicht in S . Dann existiert $h \in \mathcal{H}_+$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_c)h_n = h$.

Beweis: Sei $\alpha_m = \sup_n h_n(x_m)$, mit $\mu_0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m' 2^m)^{-1} \varepsilon_{x_m}$, $\alpha_m' = \max(\alpha_m, 1)$

$$\text{folgt für alle } n \in \mathbb{N} : \int_S h_n \mu_0(dx) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_n(x_m)}{\alpha_m' 2^m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \leq 1$$

Die Harnacksche Ungleichung ([1], 1.4.4) ergibt die lokal-gleichmäßige Beschränktheit der $(h_n)_{n=1,2,\dots}$. Der Satz von Ascoli impliziert jetzt die gleichgradige Stetigkeit der $(h_n)_{n=1,2,\dots}$ also existiert Teilfolge $\{h_{n_K}\}_{K=1,2,\dots}$ von $\{h_n\}_{n=1,2,\dots}$ und $h \in \mathcal{H}_+$:

$\lim_{K \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_c)h_{n_K} = h$. Die punktweise Konvergenz auf D impliziert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_c)h_n = h$$

(2.8) Lemma: Sei $h \in H$, U_n eine gegen S aufsteigende Folge relativ kompakter, offener Teilmengen von S , $\mu_x^{U_n}$ das zu $x \in U_n$ gehörige harmonische Maß (siehe [1], S.120), dann gilt:

$$\underline{\{h\}(x) = \sup_n \int |h| d\mu_x^{U_n}(dx)}$$

Beweis: 1) Zu $h \in \mathcal{H}$ definiere die subharmonische Funktion h_n auf S wie folgt: Sei $n_0(x)$ die kleinste natürliche Zahl n mit $x \in U_n$, dann

$$h_n = \left\{ \begin{array}{ll} |h| & 1 \leq n < n_0(x) \\ |h| & \text{auf } \bar{U}_n \\ \int |h| d\mu_x^{U_n} & \text{auf } \bar{U}_n \end{array} \right\} \quad n \geq n_0(x)$$

Aus der Definition folgt: $0 \leq |h| \leq \dots \leq h_n \leq h_{n+1} \leq \dots, h_0 = \sup_n h_n$

besitzt die Mittelwertschenschaft, also:

(2.9) h_0 endlich auf $S \Leftrightarrow h$ besitzt harm. Majorante $h_0 \in \mathcal{H}_+ \Leftrightarrow h \in H$

2) Sei $h \in H$, da $h \leq |h| \leq h_0$, ist h_0 positive harm. Majorante von h . Sei weiter h' eine andere positive harmonische Majorante von h , dann folgt wegen $|h| \leq h' : h_n \leq h' \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $h_0 \leq h'$. h_0 ist somit die kleinste positive harmonische Majorante von h , d.h.

$$h_0 = \{h\}.$$

(2.10) Definition von $\mathcal{T}_S$: $\mathcal{T}_S$ sei die durch die Familie F von Halbnormen auf H definierte lokal-konvexe Topologie,

$$F = \{p_x \mid p_x(h) = |h|(x), \quad x \in S\}$$

(2.11) Satz: $\mathcal{T}_S$ ist metrisierbar

Beweis: Sei $D = \{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ wieder eine abzählbare, in S dichte Teilmenge, sei $\mathcal{T}_S'$ die durch die Familie $F' = \{p_{x_m} \mid x_m \in D\} \subset F$ definierte metrisierbare Topologie auf H . $\mathcal{T}_S'$ stimmt mit $\mathcal{T}_S$ überein, wenn gezeigt werden kann:

zu jeder $\mathcal{T}_S$ -Umgebung $U(\varepsilon, x_1, \dots, x_n) = \{h \mid |h|(x_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$ existiert $\mathcal{T}_S'$ -Umgebung $U(\varepsilon', x')$ mit $U(\varepsilon', x') \subset U(\varepsilon, x_1, \dots, x_n)$.

Hierbei seien: $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, $x_i \in S$, $1 \leq i \leq n$, $x' \in D$.

Konstruktion mit Hilfe der Harnackschen Ungleichung

1) Im Laplace-Fall gilt nach ([1], 1.5.5): Zu der kompakten Menge $K_1 = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S_1$ und jedem $x' \in D_1$ existiert reelles $\alpha_1 > 0$: $\sup_{K_1} h_1 \leq \alpha_1 h_1(x') \quad \forall h_1 \in \mathcal{H}_+^1$.

Die Umgebung $U(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}, x') = \{h_1 \mid |h_1|(x') \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_1}\}$ leistet das Verlangte.

2) Für den Fall der Wärmeleitungsgleichung wähle ein $x_2' = (0, t')$ mit $t' > t_1$, $1 \leq i \leq n$ wobei $x_i = (\{i, t_i\})$, $1 \leq i \leq n$ die vorgegebene Punktmenge aus S_2 sei. Auf $\mu = \varepsilon_{x_2'}$ wende ([1], 1.4.4) an: Es existiert $\alpha_2 > 0$, so daß für $K_2 = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\sup_{K_2} h_2 \leq \alpha_2 \int h_2 d\mu = \alpha_2 h_2(x_2') \quad \forall h_2 \in \mathcal{H}_+^2$$

$U(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}, x_2')$ ist eine gesuchte $\mathcal{T}_S'$ Umgebung der 0.

(2.12) Satz: $\mathcal{T}_s$ ist vollständig

Beweis: 1) $\mathcal{T}_s$ ist feiner als $\mathcal{T}_c$. Sei h_n eine gegen $h \in \mathcal{T}_s$ konvergente Folge in H . Zu vorgegebenem Kompaktum $K \subset S$ existiert ein $\alpha > 0$ und ein $\bar{x} \in S$: $\sup_K h \leq \alpha h(\bar{x}) \quad \forall h \in \mathcal{H}_+ ([1], 1.4.4 \text{ u. } 1.5.5)$

Behauptung folgt wegen: $0 \leq \sup_K |h - h_n| \leq \sup_K \{h - h_n\} \leq \alpha \{h - h_n\}(\bar{x})$

Sei im folgenden $(h_n)_{n=1,2,\dots}$ eine $\mathcal{T}_s$ -Cauchy-Folge in H .

2) Existiert $h_0 \in H$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_c) h_n = h_0$. Wegen $\{h\} \geq |h| \geq 0$ für $h \in H$ ist

$(h_n)_{n=1,2,\dots}$ auch eine $\mathcal{T}_c$ -Cauchy-Folge, also existiert auch ([1], 1.1.5) eine harmonische Funktion h_0 :

$$(2.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_c) h_n = h_0$$

3) $h_0 \in H$, denn wegen $\{h_n - h_m\} \geq |h_n - h_m|$ für alle natürlichen n, m , existiert endliche Funktion g :

$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \{h_n\}$. (2.7) impliziert, daß g harmonisch ist, da

$g \geq h_0$, folgt Teilbehauptung nach (2.9).

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_s) h_n = h_0$: (2.8), (2.13) und die Voraussetzung über

$(h_n)_{n=1,2,\dots}$ implizieren:

$$\begin{aligned} \{h_0 - h_n\}(x) &= \sup_m \int |h_0 - h_n| d\mu_x^m = \sup_m \left(\lim_{n' \rightarrow \infty} |h_n - h_{n'}| \mu_x^m(dx) \right) \\ &= \sup_m \lim_{n' \rightarrow \infty} \int |h_n - h_{n'}| \mu_x^m(dx) \end{aligned}$$

$$\leq \sup_m \lim_{n' \rightarrow \infty} \int \{h_n - h_{n'}\} \mu_x^m(dx) = \lim_{n' \rightarrow \infty} \{h_n - h_{n'}\}(x), \text{ Rest n. Voraus.}$$

Leicht kann jetzt eine Kennzeichnung $\mathcal{T}_s$ -stetiger Linearformen auf H bzw. der Topologie $\mathcal{T}_s$ gefolgert werden - $(H, \mathcal{T}_s)'$ bezeichne den Vektorraum der $\mathcal{T}_s$ -stetigen Linearformen auf H .

(2.14) Satz: $(H, \mathcal{T}_s)' = H^b$

Beweis: Die Normalität von $\mathcal{K}_+$ im top. Vektorraum $(H, \mathcal{T}_s)$ - klar nach ([4], th.3.1., p.215) wegen der expliziten Gestalt der Familie F (2.10) - impliziert, daß $(H, \mathcal{T}_s)'$ im Vektorraum der Differenzen positiver, $\mathcal{T}_s$ -stetiger Linearformen auf H enthalten ist ([4], Cor.3, p.220), also: $(H, \mathcal{T}_s)' \subset H^b$.

Die Umkehrung: Ein allgemeiner Satz ([4], th.5.5., p.228) ist wegen (2.11) und (2.12) anwendbar: $H^+ \subset (H, \mathcal{T}_s)'$. Somit ist wegen $H^+ = H^b$ (nach [4], p.210-211) die Behauptung bewiesen.

Da $H^b = (H, \mathcal{T}_0)'$ ([4], th.6.1, p.230) kann $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_s$ vermutet werden, dies ist richtig.

(2.15) Satz: $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_s$

Beweis: Folgender Kennzeichnungssatz gilt: ([4], th.6.4, p.233): In einem regulär geordneten Vektorverband E mit einer lokal-konvexen Topologie $\mathcal{T}$ sind äquivalent:

($\mathcal{T}_0^!$ bezeichne die Ordnungstopologie auf E):

$$(1) \mathcal{T} = \mathcal{T}_0^!$$

(2) $\mathcal{T}$ ist die Mackey-Topologie in bezug auf die Dualität $\langle E, E^+ \rangle$

H ist regulär geordnet - gezeigt wird (2) für $\mathcal{T}_s$:

$\mathcal{T}_S$ ist metrisierbar (2.11), also $(H, \mathcal{T}_S)$ ein Mackey-Raum, d.h. $\mathcal{T}_S$ ist die Mackey-Topologie in bezug auf die Dualität $\langle H, (H, \mathcal{T}_S)' \rangle$. Wegen $H^+ = H^b = (H, \mathcal{T}_S)'$ nichts mehr zu zeigen.

Abschließend eine Bemerkung über den

(2.16) Zusammenhang von $\mathcal{T}_c$ und $\mathcal{T}_S$

1) $(H_1, \mathcal{T}_c)$ ist nicht vollständig: $\text{Im } \frac{1}{1-z} \in \mathcal{H}_1 \setminus H_1, z \in \mathbb{C}$
 Rest $|_{S_1} \text{Im } \frac{1}{(1+\frac{1}{n})-z} \in H_1$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_c) \text{ Rest } |_{S_1} \text{Im } \frac{1}{(1+\frac{1}{n})-z} = \text{Im } \frac{1}{1-z}$$

Bewiesen wird $\text{Im } \frac{1}{1-z} \in \mathcal{H}_1 \setminus H_1$ mit (2.9). Es liegt also nahe, eine Topologie $\bar{\mathcal{T}}_S$ aus $\mathcal{T}_c$ 'durch Hinzunahme der Halbnormen der Familie $F(2.10)'$ zu konstruieren. Evident sind $\bar{\mathcal{T}}_S$ und $\mathcal{T}_S$ äquivalent.

2) $(H_1, \mathcal{T}_S)$ ist topol. Vektorverband, $(H_1, \mathcal{T}_c)$ ist es nicht - letzteres wegen ([4], 7.1, p.234), da für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $y_1, y_2 \in S_1$:

$$|K_1(0, y_1) - K_2(0, y_2)| = |1 - 1| = 0 \leq \varepsilon$$

und

$$\{K_1(0, y_1) - K_2(0, y_2)\} = K_1(0, y_1) + K_1(0, y_2) = 1+1 = 2.$$

III. Duale Paarungen

1. Duale Ausgangsstrukturen

Bezeichne H^i das Bild der Räume $W^i \subset \mathcal{C}_0(S^*)$ bei der Cauchy-Dirichlet-Abbildung c (I,6), h^i seien die Elemente von H^i .

1.1 Homöomorphiesatz

$$(H^i, \mathcal{T}_K) \xrightarrow{c \circ \tau} (H^i, \mathcal{T}_0), \quad i = 1, 2$$

Beweis: Zu bemerken nur: c , c^{-1} und τ , τ^{-1} sind positive, lineare Abbildungen (siehe I,6 und 10 bzw. II, 1.5).

1.2 Dualität: H und H^i sind duale Räume, die definierende Bilinearform lautet:

$$\langle h, h^i \rangle = [(c \circ \tau)^{-1} (h^i)](h), \quad i = 1, 2$$

Beweis:

(1.3) $i = 1$: H^1 trennt die Punkte von H , da $(H, \mathcal{T}_c)$ lokal konvexer Vektorraum, der Hausdorffsch ist.

(1.4) $i = 2$: Es gilt sogar $\{ \varepsilon_x \mid x \in V^* \} \subset H^2$ trennt die Punkte von H . Angenommen $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$ und $h_1 = h_2$ auf V^* , seien μ_1 die h_1 1-1 deutig zugeordneten Martinmaße. Nach [7] und wegen der Regularität von V gilt:

$$\{ \int K(\cdot, y) \{ \mu_1 - \mu_2 \} (dy) = 0 \text{ auf } V \} \Rightarrow \{ \int K(\cdot, y) \{ \mu_1 - \mu_2 \} (dy) = 0 \text{ auf } S \}$$

Also $\mu_1 = \mu_2$, also $h_1 = h_2$, Widerspruch.

2 Zwei Dichteaussagen in bezug auf die Kerne $K, \tilde{K}$

Eine vorbereitende Aussage für den nicht-kompakten Fall:

$$(2.1) \text{ Lemma } M_b(S_2^*) \subsetneq \hat{M}(S_2^*)$$

Beweis: Sei $\mu \in M_b(S_2^*)$ und $f = \int K_2(., y) \mu(dy)$. Die reellwertige Funktion f auf S_2 $\{K_2(x, .) \text{ liegt per def. in } \mathcal{C}_0(S_2^*)\}$ liegt in H_2 genau dann, wenn f auf jedem Streifen $S_{2,m} = \{x | 0 < t < m\}_{m=1,2,\dots}$ harmonisch ist. Nach [5] gilt aber auf $S_{2,m}$:

$$f = \int K_m(., y) \mu_m(dy) \quad \text{wobei } x_m = (0, m), \quad K_m(., y) = \frac{K_2(., y)}{K_2(x_m, y)}$$

und $\mu_m = K_2(x_m, .) \mu$. Auf $S_{2,m}$ ist f aber genau dann harmonisch, wenn $\|\mu_m\| < +\infty$ - wegen $\mu \in M_b(S_2^*)$ und $K_2(x_m, .) \in \mathcal{C}_0(S_2^*)$ ist Bedingung erfüllt.

Die strikte Inklusionsbeziehung gilt, da nach [5] $m(1) = \lambda$ (Lebesgue-Maß).

$$(2.2) \text{ (1.Dichtesatz): Die Räume } W^i \text{ liegen } \mathcal{I}_g\text{-dicht in } \mathcal{C}_0(S^*).$$

Beweis: Die $\mathcal{I}_g$ -stetigen Linearformen auf $\mathcal{C}_0(S^*)$ können durch Maße $\mu \in M_b(S^*)$ dargestellt werden, also nach (2.1):

$$\int K(., y) \mu(dy) \in H.$$

Angenommen, W^i liege nicht $\mathcal{I}_g$ -dicht in $\mathcal{C}_0(S^*)$, d.h. es existieren Maße $\mu_1, \mu_2 \in M_b(S^*)$ mit

$$(1) \mu_1 = \mu_2 \text{ auf } W^i, \quad (2) \text{ Existiert } f_0 \in \mathcal{C}_0(S^*): \mu_1(f_0) \neq \mu_2(f_0).$$

(1.3), (1.4), Satz von Fubini und (I,7) implizieren: ($i = 1, 2$)

$$\mu_1 = \mu_2 \text{ auf } W^i \Leftrightarrow \forall \int K(., y) \mu_1(dy) = \forall \int K(., y) \mu_2(dy) \quad \forall v \in {}^i H'$$

$$\Leftrightarrow \int K(., y) \mu_1(dy) = \int K(., y) \mu_2(dy) \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2, \text{ Widerspruch zu (2).}$$

Den 2. Dichtesatz bereitet vor:

(2.3) Lemma: $\tilde{L}$ ist Untervektorverband in $\mathcal{L}_0(S^*)$ und $\tilde{\tau}$ ist auf L 1-1 deutig.

Beweis: Nach (II, 1.13) noch zu zeigen: $\tilde{\tau}$ ist 1-1 deutig, letzteres gilt entsprechend (II, 1.7), wenn ich nachweise:

(2.4) Gilt für $l_1, l_2 \in L$: $l_1 \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) = \int l_1 \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy)$, $i=1, 2$ für alle $\tilde{\mu} \in \tilde{M}_+(S^*)$, dann folgt für $l = \sup(l_1, l_2)$

$$l \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) = \int l \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) \quad \forall \tilde{\mu} \in \tilde{M}_+(S^*)$$

Nachweis von (2.4):

1) Eine Partition von S : Sei $A_1 = \{y | \tilde{l}_1(y) \geq \tilde{l}_2(y)\}$, $A_2 = \complement A_1$, nach (II, 1.13) ist A_1 abgeschlossene, A_2 offene Teilmenge von S^* , also:

$$\tilde{\mu}_{A_1} = \chi_{A_1} \tilde{\mu} \in \tilde{M}_+(S^*)$$

Mit $\tilde{h}_1 = \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}_{A_1}(dy) \in \mathcal{H}_+$ gilt zunächst

$$l \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) = l(\tilde{h}_1) + l(\tilde{h}_2)$$

2) Berechnung von $l(\tilde{h}_1)$, $i = 1, 2$: o.B.d.A. $i = 1$, zu $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_+$ mit $h_1 + h_2 = \tilde{h}_1$ existieren Maße $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \tilde{M}_+(S^*)$ mit

$$\tilde{\mu}_{A_1} = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 \quad \text{und} \quad h_1 = \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}_1(dy), \quad i = 1, 2$$

Nach (II, 2.2) gilt nun: $l(\tilde{h}_1) = \sup \{l_1(h_1) + l_2(h_2) | h_1 + h_2 = \tilde{h}_1\}$

$$l(\tilde{h}_1) = \sup_{\tilde{\mu}_1, i=1, 2} \left\{ \int \tilde{l}_1(y) \tilde{\mu}_1(dy) + \int \tilde{l}_2(y) \tilde{\mu}_2(dy) \right\}$$

$$\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_{A_1}$$

Auf A_1 ist nach Definition: $\tilde{l}_1 = \tilde{l}$,

also:

$$l(\tilde{h}_1) = \int \tilde{l}(y) \tilde{\mu}_{A_1}(dy) = \int l \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}_{A_1}(dy)$$

Sofort folgt:

(2.5) Korollar: Für alle $l \in L$ gilt:

$$1 \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) = \int l \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) \quad \forall \tilde{\mu} \in \tilde{M}(S^*)$$

Unmittelbare Konsequenz:

(2.6) (2. Dichtesatz): $\tilde{L}$ liegt $\mathcal{T}_g$ -dicht in $\mathcal{L}_0(S^*)$

Beweis: (2.3) und (II, 1.13) gestatten die Anwendung des Satzes von Stone-Weierstraß in seiner verbandstheoretischen Form, siehe etwa ([4], th. 8.1, p. 243).

3 Maximale Paarungen

Entscheidend für die Konstruktionen in diesem Abschnitt ist:

(3.1) Lemma: $M_K(S_2^*) \subsetneq \tilde{M}(S_2^*) \subsetneq M_b(S_2^*)$

Beweis: 1) $\tilde{M}(S_2^*) \subset M_b(S_2^*)$ Zu $\tilde{\mu} \in \tilde{M}(S_2^*) \exists$ ein $\mu \in \hat{M}(S_2^*)$

- klar aufgrund der Definition von $\tilde{K}_2$ und (I, 7) - mit:

$\mu = \{K_2(x_2, \cdot)\}^{-1} \tilde{\mu}$, o.B.d.A. $\tilde{\mu} \in \tilde{M}_+(S_2^*)$, also:

$\|\tilde{\mu}\| = \tilde{\mu}(1) = \int K_2(x_2, y) \mu(dy) = h_2(x_2)$ wobei wegen $\mu \in \hat{M}_+(S_2^*)$.

$h_2 = \int K_2(\cdot, y) \mu(dy) \in \mathcal{H}_+$. Behauptung folgt wegen $h_2(x_2) < +\infty$.

2) $M_K(S_2^*) \subset \tilde{M}(S_2^*)$: Mit μ ist auch $\mu' = \{K_2(x_2, \cdot)\}^{-1} \mu \in M_K(S_2^*)$.

Wegen $\int \tilde{K}_2(\cdot, y) \mu(dy) \in H_2 \iff \int K_2(\cdot, y) \mu'(dy) \in H_2$ folgt

Behauptung nach (2.1).

3) $\underline{M_b^+(S_2^*)} \not\subseteq \underline{\tilde{M}_+(S_2^*)}$: Wähle $\mu_o = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \varepsilon_n$, die Maße $\mu_{o,m}$:

$\mu_{o,m} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \varepsilon_n$ liegen nach (2) in $\tilde{M}_+(S_2^*)$ und streben monoton wachsend gegen μ_o , also

$h_{o,m} = \int K_2(\cdot, y) \mu_{o,m}(dy) \in \mathcal{K}_+$ und $h_o = \sup_m h_{o,m} \in \mathcal{K}_+^*$

h_o kann nicht harmonisch sein, nach (II, 1.14) gilt:

$$h_o(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} K_2(\{x, t\}, \{n, 0\}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \alpha(t) e^{-\frac{2| \{x, t\} - n |^2 + n^2 t}{8t}}$$

Für alle x mit $t > 2 \Rightarrow h_o(x) = +\infty$

4) $\underline{M_K^+(S_2^*)} \not\subseteq \underline{\tilde{M}_+(S_2^*)}$: $\tilde{\mu}_o = \sum_1^\infty (e^{n^2})^{-2} \varepsilon_n$ liegt in $\tilde{M}_+(S_2^*)$:

Nach (II, 1.14) ersichtlich: $\tilde{h}_o(x) = \int \tilde{K}_2(x, y) \tilde{\mu}_o(dy) < +\infty \quad \forall x \in S_2$.

Für $\tilde{\mu}_{o,m} = \sum_1^m (e^{n^2})^{-2} \varepsilon_n$ und $\tilde{h}_{o,m} = \int \tilde{K}_2(\cdot, y) \tilde{\mu}_{o,m}(dy)$

gilt $\tilde{h}_{o,m} \uparrow \tilde{h}_o$ - wende Konvergenzaxiom an ([1], S. 11).

(3.2) Bemerkung: Man beachte, daß (2.1) im Beweis von (2.2) entscheidend ausgenutzt wurde - für die Räume $\tilde{M}(S_2^*)$ gilt eine andere Inklusionsbeziehung (3.1) - also kann der Beweis von (2.2) nicht auf $(^1H')$, $i = 1, 2$ übertragen werden.

Die $\mathcal{L}_o(S^*)$ bzw. $\mathcal{L}_b(S^*)$ Erweiterungen L_o, L_b von L in H^b können jetzt konstruiert werden:

(3.3) Satz: Sei $f \in \mathcal{L}_o(S^*)$ und $\sigma = \sigma\{(H, \mathcal{T}_g)', H\}$ die schwache Topologie auf $(H, \mathcal{T}_g)'$ (Definition von $\mathcal{T}_g$ II, 2.10), sei weiter $l_n \in L$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_g) \hat{l}_n = f$. Dann existiert Teilfilter $\mathcal{F}$ der Folge $l_n \in (H, \mathcal{T}_g)'$ und $l_o \in (H, \mathcal{T}_g)'$ mit:

$$(3.4) \quad \lim_{\mathcal{T}} (\sigma) l_n = l_0 \text{ und } l_0 \tilde{K}(\cdot, y) = f(y) \quad \forall y \in S^*$$

$$(3.5) \quad l_0 \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) = \int l_0 \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) \quad \forall \tilde{\mu} \in \tilde{M}(S^*)$$

Beweis: (3.4): Wenn $\{l_n\}_{n=1,2,\dots}$ gleichgradig stetig in $(H, \mathcal{T}_S)'$, dann impliziert der Satz von Alaoglu-Bourbaki ([4], p.84) die schwach-relative Kompaktheit der Folge $(l_n)_{n=1,2,\dots}$ in $(H, \mathcal{T}_S)'$. Die gleichgradige Stetigkeit der Folge $(l_n)_{n=1,2,\dots}$ in $(H, \mathcal{T}_S)'$ ist nach ([4], th.4.2, p.83) bewiesen, wenn die Folge $(l_n)_{n=1,2,\dots}$ einfach beschränkt ist.¹⁾ Gezeigt wird:

$$\sup_n \|l_n(h)\| < +\infty \quad \forall h \in \mathcal{H}_+$$

Sei $h = \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy)$, n_0 die zu $\varepsilon > 0$ nach Voraussetzung existierende nat.Zahl: $\|\tilde{l}_n(y) - f(y)\| < \varepsilon$ auf S^* $\forall n \geq n_0$.
de

$$(2.5) \text{ impliziert: } \|l_n(h)\| \leq \int \|\tilde{l}_n(y) - f(y)\| \tilde{\mu}(dy) + \int \|f(y)\| \tilde{\mu}(dy) \\ \leq \varepsilon \|\tilde{\mu}\| + \text{const} \|\mu\| \quad \forall n \geq n_0, \text{ mit (3.1) folgt Behauptung.}$$

Zu (3.5): Beachtet man (3.1), (2.5), den Satz von Lebesgue und die Relation (nach 3.4):

$\{\lim_{\mathcal{T}} (\sigma) l_n\}(\tilde{K}(\cdot, y)) = \{\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_g) \tilde{l}_n\}(y)$ für alle $y \in S^*$, so gilt für alle $\tilde{\mu} \in \tilde{M}(S^*)$:

$$\begin{aligned} \int l_0(y) \tilde{\mu}(dy) &= \int \{\lim_{\mathcal{T}} (\sigma) l_n\} \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) = \int (\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_g \tilde{l}_n) \tilde{\mu}(dy) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_g) \int \tilde{l}_n(y) \tilde{\mu}(dy) = \lim_{\mathcal{T}} (\sigma) l_n \left\{ \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy) \right\} \\ &= l_0 \int \tilde{K}(\cdot, y) \tilde{\mu}(dy). \end{aligned}$$

1) Wesentlich wird ausgenutzt, daß $\mathcal{T}_S$ metrisierbar und vollständig ist.

(3.6) Bezeichne L_0 die Teilmenge von H^b , die man aus L durch Hinzunehmen der in (3.3) konstruierten Linearformen l_0 erhält.

(I, 1.8) und (3.5) ergeben

(3.7) $\tilde{\tau}$ ist 1-1 deutige Abbildung von L_0 auf $\mathcal{L}_0(S^*)$

Für den Fall der Wärmeleitungsgleichung schließt sich an:

(3.8) Satz: Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}_b(S_2^*)$ kann eine Linearform $l \in H^b$ so bestimmt werden, daß gilt:

$$(3.9) \quad \underline{l\tilde{K}_2(.,y) = f(y) \quad \forall y \in S_2^*, l \int \tilde{K}_2(.,y)\tilde{\mu}(dy) = \int l\tilde{K}_2(.,y)\tilde{\mu}(dy)} \\ \underline{\forall \tilde{\mu} \in \tilde{M}(S_2^*)}$$

(3.10) Sei L_b aus L_0 durch Hinzunahme der so konstruierten Linearformen entstanden, dann ist $\tilde{\tau}$ 1-1 deutige Abbildung von L_b auf $\mathcal{L}_b(S_2^*)$.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{L}_b(S_2^*)$ und sei $g_n = \begin{cases} 1 & \text{auf } (-n, +n) \\ 0 & \text{auf } \mathbb{C} \setminus \{-(n+1), (n+1)\} \end{cases} \quad n \geq 1$

Mit $f_n = g_n f \Rightarrow f_n \uparrow f$. Sei nun l_0^n die zu f_n nach (3.4)] Linearform mit $l_0^n \tilde{K}_2(.,y) = f_n(y)$ auf S_2^* , (3.9) ist nach dem Beweisgang von (3.4) und wegen der 1-deutigen Zerlegbarkeit in Positiv- und Negativteil der Funktionen aus $\mathcal{L}_b(S_2^*)$ bewiesen, wenn die einfache Beschränktheit der Folge $(l_0^n)_{n=1,2,\dots}$ gezeigt ist.

Sei o. B. d. A. $h_2 = \int \tilde{K}_2(.,y)\tilde{\mu}_2(dy) \in \mathcal{H}_+$. Die Endlichkeit von $\tilde{\mu}_2$ (3.1), $f_n \uparrow f$ und $l_0^n(h_2) = \int_{S_2^*} f_n(y)\tilde{\mu}_2(dy)$ implizieren:

$$l_0^n(h_2) \leq \int_{S_2^*} f(y)\tilde{\mu}_2(dy) < +\infty \quad \forall n \geq 1$$

(3.10) folgt aus (3.9). - analoge Schlüsse wie im Beweis von (3.5).

Es folgen die beiden Hauptsätze der Arbeit: ($L_b = L_o$ im komp. Fall)

(3.11) Homöomorphiesatz

Bezeichne $\bar{H}$ das Bild von $\mathcal{L}_b(S^*)$ unter c ; $\mathcal{I}_o, \mathcal{I}_K$ seien die in (I:2,9) eingeführten Ordnungstopologien auf H bzw. H^b , dann gilt: $c \circ \tilde{\tau}$ ist Homöomorphie:

$$\frac{(\mathcal{L}_b, \mathcal{I}_K) \xrightarrow{c \circ \tilde{\tau}} (\bar{H}, \mathcal{I}_o)}{.}$$

Beweis: Nach (3.11) ist $\tilde{\tau}$ eine positive, lineare Abbildung von L_b auf $\mathcal{L}_b(S^*)$, $\tilde{\tau}^{-1}$ eine positive, lineare Abbildung von $\mathcal{L}_b(S^*)$ auf L_b . Wegen (I,6) und aufgrund der zugehörigen Ordnungstopologien $\mathcal{I}_o$ und $\mathcal{I}_K$ nichts mehr zu zeigen.

(3.12) Dualität

Die Räume $H, \bar{H}$ sind dual vermöge der Bilinearform

$$\underline{\langle h, \bar{h} \rangle = [(c \circ \tilde{\tau})^{-1}(\bar{h})](h) \quad ; \quad h \in H, \bar{h} \in \bar{H}}$$

Beweis: Aufgrund der Konstruktion von $\bar{H}$ und wegen (1.4) nichts mehr zu zeigen.

IV. Anmerkungen

1. Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation

ε_x (Definition in I, 10) kann interpretiert werden als Verteilung der 1. Treffer des Brown- bzw. Raum-Zeit-Prozesses auf dem 'zugehörigen' Martinrand S^* . Für $x_1 \neq x_2$ kann jetzt $\sup(\hat{\varepsilon}_{x_1}, \hat{\varepsilon}_{x_2}) \in \mathcal{C}_0(S^*)$ gedeutet werden als Verteilung der 1. Treffer des betreffenden Prozesses, der startet "gemäß der ordnungsbeschränkten Linearform $l_0 = \sup(\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2})$ ".

2. Dualität harmonischer Räume

Bezeichne $\tilde{H}_2$ den Vektorraum der coharmonischen Funktionen in der unteren Halbebene, dessen Elemente nach [2] 1-1 deutlich den Funktionen aus $\mathcal{C}_b(S_2^*)$ zugeordnet sind, so gelten (3.11) und (3.12) entsprechend, wenn $\bar{H}_2$ durch $\tilde{H}_2$ ersetzt wird: Sieveking hat in [5] gezeigt, daß für die Wärmeleitungsgleichung in der Ebene ein zu R homöomorpher Martinrand angegeben werden kann. Bedenkt man weiter, daß für die nicht-negativen Lösungen der Laplace-Gleichung im R^2 kein Martinrand existiert, im $R^m, m \geq 3$ der Martinrand 1-punktig ist, so erlauben die Resultate eine spezifisch parabolische Anwendung: Man betrachte zwei verschiedene, den Axiomen von Bauer (siehe [1]) genügende parabolische Differentialgleichungen A, B mit zu R -homöomorphen Martinrändern im Sinne von [5]. Mit $H_A = \mathcal{K}_+^A - \mathcal{K}_+^A$; $H_B = \mathcal{K}_+^B - \mathcal{K}_+^B$ ist eine maximale Dualität von H_A (bzw. H_B) mit einem Teilraum von H_B (bzw. H_A) konstruierbar.

3. Fegen 'über den Martinrand'

Sei C definiert durch $C_1 = \{x \mid \|x\| < \frac{3}{4}\}$, $C_2 = \{x \mid \|(\xi, t) - (0, 1)\| < \frac{3}{4}\}$
 $C \supset V$, C^* die entsprechenden Kreistränder:

Nach ([1], 3.4.1 und S.115) kann jedes $v \in M(V^*)$ 1-1deutig auf ein $\mu \in M(C^*)$ so abgebildet werden, daß $v(h) = \mu(h) \forall h \in H$ (3.7) gestattet im folgenden Sinne die Umkehrung:

Jedem $\mu \in M(C^*)$ entspricht 1-1deutig $\hat{\mu} \in \mathcal{L}_0(S^*)$, $\hat{\mu}$ ist wiederum Bild genau einer Linearform $l_0 \in L_0$ also $\hat{\mu} = \hat{l}_0$ {über den Zusammenhang mit $M(V^*)$ siehe (I,9) und (3.6)} und es gilt ebenfalls:

$$\begin{aligned} \mu(h) &= \mu \int K(., y) \mu_h(dy) = \int \hat{\mu}(y) \mu_h(dy) = \int \hat{l}_0(y) \mu_h(dy) = l_0 \int K(., y) \mu_h(dy) \\ &= l_0(h) \quad \forall h \in H \end{aligned}$$

4. Zusammenhang mit dem 'allgemeinen' Dirichletproblem

Die Dualität (3.12) konnte konstruiert werden, weil die Ergebnisse von [2] die Existenz der hier verwendeten Cauchy-Dirichlet-Lösung in bezug auf Funktionen aus $\mathcal{L}_b(S_2^*)$ gewährleisten. Fordert man dagegen den 'fein'stetigen Anschluß an die Randfunktion in λ -fast allen Punkten $\in S_2^*$, so sind in diesem Sinne alle die beschränkten, borelmeßbaren Funktionen auf S_2^* resolutiv, die μ_1^n integrierbar sind, wobei $\mu_1^n = K_2(x_n, .)\lambda$, $x_n = (0, n) \in S_2$, $n=1, 2, \dots$. Bezeichne $\mathcal{B}_b^{\mu_1}(S_2^*)$ die Klasse dieser Funktionen, $\mathcal{B}_b(S_2^*)$ die Menge der beschränkten, borelmeßbaren Funktionen auf S_2^* . Den Zusammenhang des hier vorgetragenen Ansatzes 'am Martinrand' mit der 'fein-stetigen' Lösung des Randwertproblems und dem 'allgemeinen' Dirichletproblem klärt die Bemerkung:

Zu jedem $b \in \mathcal{B}_b(S_2^*)$ existiert ein $l \in H^b$, so daß gilt:

$$(\times) \quad \tilde{l} = b \text{ und } l \int \tilde{K}_2(., y) \tilde{\mu}(dy) = \int \tilde{l}(y) \tilde{\mu}(dy) \quad \forall \tilde{\mu} \in \tilde{M}(S_2^*).$$

Denn: Sei $\mathcal{F}$ die Teilmenge von $\mathcal{B}_b(S_2^*)$, für deren Elemente ein $l \in H^b$ mit $(\times)$ existiert. Evident ist $\mathcal{F}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und enthält nach (3.8) $\mathcal{C}_b(S_2^*)$.

Der Beweis von (3.8) zeigt aber, daß auch zu jeder Funktion $f \in \mathcal{B}_b(S_2^*)$ (wobei $f = \sup f_n$, $f_n \in \mathcal{F}$) ein $l \in H^b$ mit den Eigenschaften $(\times)$ existiert, also $f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ stimmt aber mit $\mathcal{B}_b(S_2^*)$ überein.

LITERATURANGABE

- [1] BAUER, H.
Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie
Lecture Notes in Mathematics 22, Berlin-Heidelberg-
New York, Springer (1966)
- [2] KÖHN, J. - SIEVEKING, M.
Zum Cauchyschen und Dirichletschen Problem
Math. Annalen 177, (1968)
- [3] KÖTHE, G.
Dualität in der Funktionentheorie
Journal für die reine und angew. Mathematik 191, (1953)
- [4] SCHAEFER, H.H.
Topological Vector Spaces,
New York, Macmillan (1966)
- [5] SIEVEKING, M.
Integraldarstellung superharmonischer Funktionen
mit Anwendung auf parabolische Differentialgleichungen
in: Lecture Notes in Mathematics 69, Berlin-Heidelberg-
New York, Springer (1968)
- [6] TILLMANN, H.G.
Dualität in der Potentialtheorie
Portugaliae Mathematica 13, (1954)
- [7] WIDDER, D.
Positive temperatores on an infinite rod
Trans. Am. Math. Soc. 55, (1944)

Lebenslauf

Geboren am 28.9.1938 in Karl-Marx-Stadt als Sohn des kaufmännischen Angestellten Johannes Schneider und seiner Ehefrau Charlotte, geb. Thomas.

Schulbesuche:

Grundschule in Burgstädt/Sachsen	Herbst 1944 - Herbst 1949
Volksschule in Düsseldorf	Herbst 1949 - Ostern 1950
Realschule in Düsseldorf	Ostern 1950 - Ostern 1956
Lessinggymnasium in Düsseldorf	Ostern 1956 - Ostern 1959

Nach bestandener Reifeprüfung (10.3.1959) Studium der Mathematik, Physik und Philosophie an der Universität Freiburg i.Br. vom Sommersemester 1959 bis zum Wintersemester 1961/62. Vom Sommersemester 1962 bis zur Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik (7.2.1966) Studium der Mathematik und Philosophie an der Universität Hamburg. Danach Doktorand bei Prof.H.Bauer am Mathematischen Institut der Friedrich-Alexander Universität Erlangen.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
